

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta biomedicínského inženýrství

LABORATORNÍ PRÁCE

MOMENT SETRVAČNOSTI

Obsah

ZADÁNÍ	4
TEORIE.....	4
Metoda torzních kmitů	4
Steinerova věta	4
EXPERIMENT	5
Výpočet momentů setrvačnosti vybraných těles	5
Výpočet momentů setrvačnosti kotouče	5
Měření momentů setrvačnosti vybraných těles metodou torzních kmitů	6
Tyč – referenční těleso	6
Plný válec.....	6
Dutý válec.....	7
Kotouč	7
Srovnání vypočtených a naměřených hodnot.....	7
Měření momentů setrvačnosti kotouče metodou torzních kmitů.....	8
Kotouč - osa otáčení je vzdálena 0,03m od těžiště	8
Kotouč - osa otáčení je vzdálena 0,06m od těžiště	8
Kotouč - osa otáčení je vzdálena 0,09m od těžiště	9
Kotouč - osa otáčení je vzdálena 0,12m od těžiště	9
Srovnání vypočtených a naměřených hodnot.....	9
ZÁVĚR.....	9

Seznam tabulek

Tab. 1: Výpočet momentů setrvačnosti vybraných těles	5
Tab. 2: Výpočet momentů setrvačnosti kotouče	5
Tab. 3: Měření periody kmitů tyče	6
Tab. 4: Měření periody kmitů plného válce	6
Tab. 5: Měření periody kmitů Dutého válce.....	7
Tab. 6: Měření periody kmitů kotouče	7
Tab. 7: Srovnání naměřených a vypočtených hodnot.....	7
Tab. 8: Měření periody kmitů kotouče (osa 0,03m od T)	8
Tab. 9: Měření periody kmitů kotouče (osa 0,06m od T)	8
Tab. 10: Měření periody kmitů kotouče (osa 0,09m od T)	9
Tab. 11: Měření periody kmitů kotouče (osa 0,12m od T)	9
Tab. 12: Srovnání vypočtených a naměřených hodnot.....	9

Přílohy

A Naměřené hodnoty

Zadání

- 1) Výpočtem určit momenty setrvačnosti vybraných těles: tyče, válce, dutého válce, kotouče.
- 2) Výpočtem určete moment setrvačnosti kotouče v případě, že osa otáčení souhlasí s těžištěm a pro čtyři různé vzdálenosti, kdy osa otáčení neprochází těžištěm.
- 3) Pomocí měření torzních kmitů určit momenty setrvačnosti vybraných těles: tyče, válce, dutého válce. Naměřené hodnoty porovnejte v tabulce s hodnotami vypočtenými.
- 4) Pomocí měření torzních kmitů určete moment setrvačnosti kotouče v případě, že osa otáčení souhlasí s těžištěm a pro čtyři různé vzdálenosti, kdy osa otáčení neprochází těžištěm. Naměřené hodnoty porovnejte v tabulce s hodnotami vypočtenými.

Teorie

Cílem této úlohy je ověření vztahů pro výpočet momentu setrvačnosti pomocí torzních kmitů tělesa neboť moment setrvačnosti můžeme chápat jako „míru setrvačnosti“ tělesa při jeho otáčení vzhledem k ose rotace. Dále v úloze porovnáme velikosti momentů setrvačnosti zkoumaných těles, neboť pokud není známa pružinová konstanta vinuté pružiny, bude využito referenční výpočtové metody porovnávající moment setrvačnosti jednoduchého známého tělesa a momentu setrvačnosti neznámého složitějšího tělesa.

Metoda torzních kmitů

K měření momentu setrvačnosti tělesa je možné použít torzních kmitů tělesa na drátu. Perioda kmitů torzního vlákna s tělesem o momentu setrvačnosti I je

$$I = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}$$

kde D je direkční moment vlákna. Necháme-li na stejném vlákně torzně kmitat těleso o známém momentu setrvačnosti I_0 , umožní nám to vyloučit ze vztahu direkční moment. Moment setrvačnosti měřeného tělesa je potom dán vztahem

$$I_M = I_0 \cdot \frac{T_M^2}{T_0^2}$$

kde T_0 je perioda kmitů referenčního tělesa.

Steinerova věta

Ověření Steinerovy věty provedeme srovnáním momentu setrvačnosti I tyče kmitající jako fyzické kyvadlo s periodou kmitů

$$I = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

kde m je hmotnost tyče, d vzdálenost osy otáčení a g tíhové zrychlení. Z rovnice je možno vypočítat moment setrvačnosti I a na základě Steinerovy věty.

$$I = I_0 + m \cdot r_T^2$$

kde

I_0 je moment setrvačnosti tělesa k ose procházející těžištěm, r_T vzdálenost osy rotace od těžiště.

Experiment

Výpočet momentů setrvačnosti vybraných těles

Postup:

- 1) Změříme potřebné parametry těles (hmotnost, poloměr, délku), všechny hodnoty měříme alespoň dvakrát a vypočteme jejich průměr, který zaznamenáme.
- 2) Dosazením naměřených hodnot vypočteme momenty setrvačnosti.

těleso	tyč	válec	dutý válec	kotouč
hmotost (kg)	0,244	0,550	0,529	0,396
poloměr (m)	0,0045	0,045	$r_1 = 0,045; r_2 = 0,040$	0,15
délka (m)	0,4	0,1	0,1	0,1
vzorec ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	$I = \frac{1}{3}ml^2$	$I = \frac{1}{2}mr^2$	$I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$	$I = \frac{1}{2}mr^2$
dosazení ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	$I = \frac{1}{3}0,244 \cdot 0,4^2$	$I = \frac{1}{2}0,550 \cdot 0,045^2$	$I = \frac{1}{2}0,529 \cdot 0,085^2$	$I = \frac{1}{2}0,396 \cdot 0,045^2$
výsledek ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	0,0130	0,0006	0,0010	0,0045

TAB. 1: VÝPOČET MOMENTŮ SETRVAČNOSTI VYBRANÝCH TĚLES

Výpočet momentů setrvačnosti kotouče

Postup:

- 1) Dosazením naměřených hodnot vypočteme momenty setrvačnosti.

vzdálenost osy otáčení od těžiště (m)	0,00	0,03	0,06	0,09	0,12
vzorec ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	$I = I_t = \frac{1}{2}m \cdot r_t^2$	$I = I_t + m \cdot r_t^2$	$I = I_t + m \cdot r_t^2$	$I = I_t + m \cdot r_t^2$	$I = I_t + m \cdot r_t^2$
dosazení ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	$I = \frac{1}{2}0,396 \cdot 0,045^2$	$I = I_t + 0,396 \cdot 0,03^2$	$I = I_t + 0,396 \cdot 0,06^2$	$I = I_t + 0,396 \cdot 0,09^2$	$I = I_t + 0,396 \cdot 0,12^2$
výsledek ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	0,0045	0,0049	0,0059	0,0077	0,0102

TAB. 2: VÝPOČET MOMENTŮ SETRVAČNOST KOTOUČE

Měření momentů setrvačnosti vybraných těles metodou torzních kmitů

Postup:

- 1) Těleso upneme do unašeče.
- 2) Měříme počet kmitů za čas, hodnoty zapisujeme do tabulky.
- 3) Měření opakujeme nejméně 10x.
- 4) Pro každé těleso spočteme průměrnou hodnotu periody kmitu: $T_p = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n}$.
- 5) Vypočteme moment setrvačnosti každého tělesa: $I_M = I_0 \cdot \frac{T_M^2}{T_0^2}$.
- 6) Proveďte srovnání vypočtených a naměřených hodnot, vypočteme odchylku.

Tyč – referenční těleso

číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet kmitů (n)	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10
čas (s)	1,9	1,8	2,0	1,8	1,7	4,0	3,9	3,7	3,9	3,8
perioda (s)	0,38	0,36	0,40	0,36	0,34	0,40	0,39	0,37	0,39	0,38

TAB. 3: MĚŘENÍ PERIODY KMITŮ TYČE

$$T_p = T_0 = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} = 0,38s$$

$$I_0 = 0,0130 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Plný váleček

číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet kmitů (n)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
čas (s)	1,1	1,1	1,0	0,9	1,1	1,1	1,0	1,0	1,1	0,9
perioda (s)	0,11	0,11	0,10	0,09	0,11	0,11	0,10	0,10	0,11	0,09

TAB. 4: MĚŘENÍ PERIODY KMITŮ PLNÉHO VÁLCE

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} = 0,10s$$

$$I = 0,0130 \cdot \frac{0,10^2}{0,38^2} = 0,0009 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Dutý válec

číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet kmitů (n)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
čas (s)	1,1	1,4	1,2	1,2	1,1	1,3	1,1	1,2	1,2	1,1
perioda (s)	0,11	0,14	0,12	0,12	0,11	0,13	0,11	0,12	0,12	0,11

TAB. 5: MĚŘENÍ PERIODY KMITŮ DUTÉHO VÁLCE

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} = 0,12s$$

$$I = 0,0130 \cdot \frac{0,12^2}{0,38^2} = 0,0013 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Kotouč

číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet kmitů (n)	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10
čas (s)	1,3	1,3	1,3	1,3	1,2	2,5	2,7	2,5	2,6	2,7
perioda (s)	0,26	0,26	0,26	0,26	0,24	0,25	0,27	0,25	0,26	0,27

TAB. 6: MĚŘENÍ PERIODY KMITŮ KOTOUČE

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} = 0,26s$$

$$I = 0,0130 \cdot \frac{0,26^2}{0,38^2} = 0,0061 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Srovnání vypočtených a naměřených hodnot

těleso	tyč	válec	dutý válec	kotouč
vypočtená hodnota (kg*m ²)	0,0130	0,0006	0,0010	0,0045
naměřená hodnota (kg*m ²)	ref. těleso	0,0009	0,0013	0,0061
odchylka (%)	-	50	30	36

TAB. 7: SROVNÁNÍ NAMĚŘENÝCH A VYPOČTENÝCH HODNOT

Měření momentů setrvačnosti kotouče metodou torzních kmitů

Postup:

- 1) Těleso upínáme do unašeče postupně s osou otáčení vzdálenou 0,00; 0,03; 0,06; 0,09 a 0,12 m od jeho těžiště.
- 2) Měříme počet kmitů za čas, hodnoty zapisujeme do tabulky.
- 3) Měření opakujeme nejméně 10x.
- 4) Pro každou vzdálenost osy otáčení od těžiště spočteme průměrnou hodnotu periody kmitu tělesa:

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n}.$$

- 5) Vypočteme moment setrvačnosti: $I_M = I_0 \cdot \frac{T_M^2}{T_0^2}.$

- 6) Proveďte srovnání vypočtených a naměřených hodnot, vypočteme odchylku.

Kotouč - osa otáčení je vzdálena 0,03m od těžiště

číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet kmitů (n)	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10
čas (s)	1,3	1,4	1,3	1,3	1,3	2,5	2,8	2,8	2,9	2,9
perioda (s)	0,26	0,28	0,26	0,26	0,26	0,25	0,28	0,28	0,29	0,29

TAB. 8: MĚŘENÍ PERIODY KMITŮ KOTOUČE (OSA 0,03M OD T)

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} = 0,27s$$

$$I = 0,0130 \cdot \frac{0,27^2}{0,38^2} = 0,0066 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Kotouč - osa otáčení je vzdálena 0,06m od těžiště

číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet kmitů (n)	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10
čas (s)	1,4	1,4	1,4	1,5	1,6	2,9	2,9	3,3	3,0	2,9
perioda (s)	0,28	0,28	0,28	0,30	0,32	0,29	0,29	0,33	0,30	0,29

TAB. 9: MĚŘENÍ PERIODY KMITŮ KOTOUČE (OSA 0,06M OD T)

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} = 0,30s$$

$$I = 0,0130 \cdot \frac{0,30^2}{0,38^2} = 0,0081 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Kotouč - osa otáčení je vzdálena 0,09m od těžiště

číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet kmitů (n)	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10
čas (s)	1,7	1,5	1,5	1,6	1,5	3,3	3,2	3,1	3,3	3,3
perioda (s)	0,34	0,30	0,30	0,32	0,30	0,33	0,32	0,31	0,33	0,33

TAB. 10: MĚŘENÍ PERIODY KMITŮ KOTOUČE (OSA 0,09M OD T)

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} = 0,32s$$

$$I = 0,0130 \cdot \frac{0,32^2}{0,38^2} = 0,0092 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Kotouč - osa otáčení je vzdálena 0,12m od těžiště

číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet kmitů (n)	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10
čas (s)	1,8	1,9	2,0	1,8	1,8	3,8	3,5	3,7	3,6	3,6
perioda (s)	0,36	0,38	0,40	0,36	0,36	0,38	0,35	0,37	0,36	0,36

TAB. 11: MĚŘENÍ PERIODY KMITŮ KOTOUČE (OSA 0,12M OD T)

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} = 0,37s$$

$$I = 0,0130 \cdot \frac{0,37^2}{0,38^2} = 0,0123 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Srovnání vypočtených a naměřených hodnot

vzdálenost osy otáčení od těžiště (m)	0,00	0,03	0,06	0,09	0,12
vypočtená hodnota ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	0,0045	0,0049	0,0059	0,0077	0,0102
naměřená hodnota ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	0,0061	0,0066	0,0081	0,0092	0,0123
odchylka (%)	36	35	37	19	21

TAB. 12: SROVNÁNÍ VYPOČTENÝCH A NAMĚŘENÝCH HODNOT

Závěr

Naměřené hodnoty měly vůči vypočteným celkem velkou odchylku (až 50%), což je vidět ze srovnávacích tabulek. Nejspíš to bylo způsobeno chybami při měření, jako nepřesné měření času, nebo použití odlišných výchylek pro rozkmitání těles, na měřicím přístroji totiž nebyl žádný úhломěr, který by zajistil použití stejné výchylky u všech těles.